

Условия индивидуального прогресса школьников в математике

В последнее время серьезно изменяются представления о том, какой должна быть математическая подготовка в основной школе. Еще менее двадцати пяти лет назад образовательной целью обучения математики в школе было «... вооружить всех учащихся систематизированными знаниями основ науки математики» и теми умениями и навыками, которые необходимы для «прочного усвоения этих знаний, определяемых учебной программой» [1, стр. 50]. Формирование у школьников математического мышления рассматривалось в качестве специфической цели в обучении математике [1, стр. 52], подчиненной, вообще говоря, цели прочного усвоения знаний.

Модернизация системы образования, появление новых образовательных ориентиров (установка на активное освоение человеком способов познавательной деятельности, на создание условий для самоопределения и реализации потенциальных возможностей ребенка в процессе обучения) не могла не коснуться и школьного математического образования. Изучение математики в школе не перестает концентрироваться вокруг задачи формирования предметных знаний и умений, однако теперь оно ориентируется на образовательные результаты совершенно иного типа. На первый план выходят задачи формирования интеллектуальной, исследовательской культуры школьников и связанной с ними способности учащегося свободно применять свои знания и опыт в соответствующей ситуации, а именно идентифицировать ситуацию как востребующую то или иное знание и эффективно действовать в ней [2, 3]. Иными словами, использовать приобретаемые знания в качестве личного ресурса. Заметим, что цели школьного математического образования теперь не ограничиваются рамками школы. Так, самостоятельной целью, является «развитие математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и ее приложений в будущей профессиональной деятельности» [профильный уровень].

Каким должно быть содержание математического образования, чтобы оно выступило средством, ресурсом для личностного роста учащегося? Определяя вслед за Б.И. Хасаном (см. в настоящем сборнике статью «Индивидуальный прогресс как результат образовательных отношений») *личностный рост учащегося как изменение его отношения к предмету, наблюдаемое через изменение действия с предметом*, мы неизбежно должны перейти на деятельностный язык для описания содержания математического образования. Описания теперь должны строиться не на языке математики как системы знаний, а на языке математики как вида деятельности.

Анализ школьной программы и специфики математики как вида деятельности (см., например, [4, 5]) позволил выделить три основные для школы вида математической деятельности, в которых возможны образовательные достижения учащихся: моделирование, следование инструкции и формулирование утверждений. Соответственно, выделены три предметно–деятельностные линии. Охарактеризуем их подробнее.

1. *Линия моделирования*, связанная с получением модельного «чистого» знания, освобожденного от всех несущественных и случайных аспектов.

По отнесенности к объекту математическое моделирование бывает двух видов: моделирование нематематических ситуаций на математическом языке и моделирование объектов и отношений, данных в одном математическом языке (геометрическом) средствами другого (алгебраического). К линии моделирования можно отнести построение математических моделей для описания и решения прикладных задач, их исследование, а также интерпретацию результатов моделирования, т.е. проверку и оценку результатов своей

работы, соотнесение их с поставленной задачей. Модельными средствами являются различные (символические и графические) языки математики.

Заметим, что хотя деятельностная линия моделирования может разворачиваться, вообще говоря, на разном предметном материале, однако в качестве предмета моделирования целесообразно положить некоторые базовые по отношению к школьной математике категории. Одной из таких базовых категорий начальной школы является отношение целого и частей [программа РО], а соответствующим предметным материалом – текстовые задачи. В основной же школе, по нашему мнению, базовой категорией для алгебры является понятие функциональной зависимости. Во второй ступени достаточно полно рассматриваются всего две функциональные зависимости – линейная и квадратичная. Эти функциональные зависимости осваиваются как модели объектов (или процессов), при этом используются три типа моделей: таблица (числовая последовательность), формула и график. Табличная форма является исходной при моделировании. Предметом моделирования могут быть, например, закономерности в изменении количественных характеристик объектов (количестве символов в последовательностях знаковых конструкций).

2. Линия следования инструкции, связанная с пониманием алгоритмических процедур и получением определенного продукта по данной абстрактной схеме.

Эта линия связана с алгоритмическим мышлением. Подчеркнем, что понимание алгоритмических процедур и следование им до сих пор является основным содержанием школьной практики обучения математике. Для того, что бы задать ситуацию понимания, рассматривается некоторое новое правило (алгоритм) решения известного класса задач. При этом все операции в алгоритме также предполагаются известными (входят в школьную программу). Специфика же алгоритма состоит в том, что он не является всеобщим по отношению к указанному классу задач, однако может быть достроен до общего алгоритма. Критерием понимания алгоритма является успешное выполнение следующих действий: реконструкция правила по данному частному случаю его применения (освоение нового алгоритма); применение алгоритма для решения аналогичной задачи, используя предложенный пример как образец; обнаружение ограничений (неприменимости) алгоритма, связанных с особенностями предметного материала и, наконец, перестройка алгоритма так, чтобы он охватывал обнаруженные новые случаи.

3. Линия формулирования утверждений, в которую мы включаем следующие три типа действий: обоснование (построение доказательных рассуждений), конструирование утверждений и оценка правдоподобности утверждений.

Математическая деятельность задается двумя не сводимыми друг к другу процессами: процессом построения математического знания и процессом его преобразования к виду, пригодному для научной коммуникации (в виде системы знаний, содержащей определения, теоремы и доказательства). Построение математического знания осуществляется в содержательно–генетической логике, а изложение – в формальной логике. Главное требование здесь состоит в том, что знание о свойствах и действиях должно быть представлено в форме, простой для его развития, исследования и оценки научным сообществом. Такой формой представления является развитая теория объекта или ее отдельные элементы, в частности, утверждения.

Формулирование утверждений о математических объектах является очень важным действием, требующим рефлексии ситуации получения знания об объекте, классе объектов или способе и последующем переоформлении этого знания. Этот вид деятельности имеет коммуникативную природу и связан как с осуществлением рефлексии, так и с пониманием. Формулирование утверждений может происходить на разном предметном материале (геометрическом, арифметико-алгебраическом и логическом).

Заметим, что способы оценки истинности и правдоподобности математического знания отличаются. Критерием правильности (истинности) математического знания служит наличие доказательного рассуждения (описание вывода этого знания по определенным

канонам из уже имеющегося), тогда как критерием правдоподобности является убедительное рассуждение (не столь жестко канонизированное).

В *математическом доказательстве* есть как общенаучная составляющая, связанная с понятием доказательства как способа поиска истины, так и специальная составляющая – формально–логический метод. В математической деятельности доказательство (цепочка доказательных рассуждений) может быть включено в систему разных действий. Перечислим их.

- Воспроизведение доказательного рассуждения (реконструкция доводов и логической цепочки рассуждений). Оно необходимо, например, при написании текста статьи или учебника и предполагает расчленение, разбиение текста на части.
- Построение доказательного рассуждения (поиск доводов и логической цепочки рассуждений). Заметим, что построение доказательного рассуждения есть деятельность, не сводящаяся к формально – логическому мышлению.
- Понимание доказательного рассуждения. Размышлявшие над содержанием математической деятельности известные математики Д. Пойа и Л. Эйлер считали, что понимание доказательства основано на интуиции и ощущении целого, в отличие от его воспроизведения, основанного на формальной логике.
- Упрощение доказательного рассуждения, т.е. проверка рассуждения на необходимость всех содержащихся в нем посылок и логических переходов.
- Оценка доказательного рассуждения (его правильности и строгости). Это ни что иное, как проверка утверждения на достоверность.
- Обобщение метода и формы доказательного рассуждения. Обобщением формы доказательного рассуждения являются правила формальной логики, а обобщение метода позволяет распространить его на более широкий класс объектов.

Деятельность обоснования утверждений в практике школьного обучения сводится к изучению и пониманию готовых доказательств.

Конструирование утверждений встречается в школьной практике в форме выведения следствий из данных утверждений и обобщения утверждений.

Оценка правдоподобности утверждений встречается в школьной практике в форме контроля и оценки решения задач, вывода формул и др.

Перестройку отношений школьника с учебным предметом в образовательном пространстве можно увидеть через изменения в действиях в рамках каждой из выделенных выше предметно–деятельностных линий. В своем развитии это отношение проходит три уровня, отражающие изменения в мышлении и понимании учащегося с одной стороны, и возможности действий именно с данным предметным материалом – с другой стороны.

Уровни мышления в линии моделирования

Первый уровень: опознание известных отношений “объект – модель” и осуществление расчетов по модели.

Второй уровень: построение известного типа модели через выделение существенного в рассматриваемых ситуациях.

Третий уровень: переход от одного модельного языка к другому, преобразование модели с использованием модельных средств.

Для категории «целое и части» первые два уровня мышления могут быть конкретизированы следующим образом. Первый уровень: замещение элементов, данных в тексте задачи числами (решение по действиям) или буквами (составление уравнения). Опознание разностного или кратного отношения данных и требуемого и представление этого отношения в графической (схема) или знаковой (уравнение) форме. Второй уровень: вычленение существенных элементов условия задачи из текста задачи, содержащего

зашумления, связанные с образованием множества пересчета из разнородных элементов или введением большого количества искомых величин. Моделирование сложного (разностно-кратного) отношения величин в графической (схема) и знаковой (уравнение) форме.

Для категории «функциональной зависимости», при исследовании, например, числовых закономерностей, описанные выше уровни мышления могут быть конкретизированы следующим образом. Первый уровень: применение числовых последовательностей для моделирования изменяющихся числовых характеристик объектов (рядов объектов) и проверка (подстановкой в формулу) конкретного значения, удовлетворяет ли данная закономерность заданному закону. Второй уровень: выделение существенного (типа зависимостей, закона) в образовании числовых рядов и конструкции формул и проверка, удовлетворяет ли данная закономерность выделенному или заданному закону. Третий уровень: уверенный переход к алгебраическому (формулы) и к геометрическому (графики) языку выражения одной и той же закономерности. Соотнесение разных закономерностей, используя указанные знаковые средства.

Уровни понимания в линии следования инструкции

Первый уровень: опознание текста как инструкции к действию без устных пояснений и вычленение из текста отдельных операций и их результатов.

Второй уровень: применение алгоритма, данного в виде образца применения, для решения задачи (при этом учитывается специфика материала). Выделение существенных моментов алгоритма (в отличие от случайных, связанных с материалом образца) и существенных характеристик материала.

Третий уровень: трансформация (редактирование) алгоритма в соответствии с изменением типа материала.

Для помещения наших рассуждений об изменении содержания отношений школьника с учебным предметом в педагогическую действительность, воспользуемся аналитической схемой, которую использовал в упомянутой выше статье [6] Б.И. Хасан при построении психологической модели индивидуального прогресса школьника, не отнесенной ни к какому предметному материалу. Модель Б.И. Хасана задана через описание содержания отношений ученика, учебного предмета и общественного взрослого в образовательном пространстве.

Мы полагаем, что изменение отношений ученика с учебным предметом в выделенных нами линиях предполагает и изменение его отношений с общественным взрослым. А именно, в каждой из рассмотренных выше линий уровни развития отношений школьника с учебным предметом соответствуют определенным типам отношений школьника с общественным взрослым.

Первый уровень характеризуется тем, что ученик строит отношения с общественным взрослым и подчиняет свое действие регулятивам и образцам, данным общественным взрослым, «заслоняющим» собой предмет.

На втором уровне учащийся уже обнаруживает *наличие* предмета и его логики, однако еще не способен двигаться в нем самостоятельно. Поэтому он вынужден удерживать два типа отношений – отношения с предметом и новые отношения с общественным взрослым, который по норме направляет и организует его движение. Возможность выхода на этот уровень связана с тем, что сам общественный взрослый начинает демонстрировать подчиненность своих действий логике предмета (оставаясь в рамках изложения знания). Заметим, что при изучении математики это достаточно легко может сделать учитель, поскольку логика предмета явно дана в виде формул, теорем и формальных правил рассуждений. Второе условие выхода школьника на этот уровень – обнаружение им *возможности движения* в предмете, т.е. построения доказательств, формулирование утверждений, конструирование моделей и алгоритмов. Заметим, что для этого необходима уже другая позиция взрослого, который демонстрирует построение знания в содержательной логике и может организовать это движение для школьника. Другими

словами, в одной позиции организуется получение результата, а в другой – его предъявление для оформления, при этом в каждой действие происходит в разных логиках.

На третьем уровне учащийся строит отношения с предметом, следуя логике самого предмета и обращаясь к взрослому лишь за профессиональной оценкой своих действий, не как к учителю, а как к научному консультанту. Трудности освоения школьником третьего уровня заключаются в том, что его пробы самостоятельного действия с предметом как правило вызывают конфликт его отношений с общественным взрослым, поскольку это требует от взрослого смены позиции. Учитель как носитель образцов исчезает, необходима другая позиция – коллега, математик – ученый.

Возвращаясь к первому уровню, мы можем сказать, что движение в нем связано с освоением индивидуального действия (мыследействия, данного при описании уровня в линиях). Движение на втором уровне требует наличия достаточно сложно организованного мыслекоммуникативного пространства. Освоение третьего уровня связано с преобразованием знака (чистым мышлением).

Итак, мы выделяем два условия прогресса школьника в математике. Первое условие прогресса состоит в том, что предмет (математика) должен быть представлен специфическим образом, а именно, через предметно-деятельностные линии, которые содержат материал и действия с ним. Второе условие – представленность в образовательном процессе соответствующих позиций общественного взрослого.

Вопросы об обосновании отнесения содержания такого математического образования к ступеням образования и введения обеспечивающих его организационно – педагогических форм требует отдельного обсуждения.

Литература

1. Метельский Н.В. Дидактика математики: Общая методика и ее проблемы. [Учебн. пособие для вузов] – 2-е изд., перераб. – Мн.: Изд-во БГУ, 1982. – 256 с.
2. Каспаржак А., Митрофанов К., Поливанова К. Становление ключевых компетентностей и результаты традиционного обучения (размышления по материалам проекта «Модернизация образования: перспективные разработки») // Педагогика развития: Становление компетентности и результаты образования в различных подходах: Материалы 10-й науч.-практ. конф. – Красноярск, 2004. С. 74-87.
3. Громыко Ю.В. Проблема обновления содержания образования в постсоветской школе и перспективы подхода В.В. Давыдова / Развивающее образование. Том I. Диалог с В.В. Давыдовым – М.: АПК и ПРО, 2002. – 254 с.
4. Аронов А.М., Ермаков С.В., Знаменская О.В. Учебно-образовательное пространство в педагогике развития: математическое образование. – Красноярск, 2001. С. 98.
5. Знаменская О.В., Белоконь О.И. Институциональные условия и динамика становления исследовательской и математической компетентностей в старшей школе / IV Всесибирский конгресс женщин-математиков: Материалы конф. Под ред. Г.М. Рудаковой. – Красноярск: РИО СибГТУ, 2006, с. 17 – 19.
6. Хасан Б.И. Индивидуальный прогресс как результат образовательных отношений / (см. настоящий сборник, стр. ?)