

О роли текстовых задач.

Как известно, особое место в курсе математики начальной школы занимают текстовые задачи. Отсюда, с одной стороны, возникает вопрос о самом понятии "текстовая задача" и ее роли в обучении математике, с другой стороны, уровень освоения математических понятий, встречающихся в этих задачах, различен у учащихся, что вынуждает учителей возвращаться к ним снова и снова. В.В.Давыдов указывает: "Текстовые задачи строятся детьми как частные случаи выражения некоторых общих закономерностей"[2].

Следовательно, речь идет о том, что текстовая задача есть способ восхождения от абстрактного к конкретному. Но если это способ, то сама задача выступает как оформляющий и организующий деятельность знак (в смысле Б.Д.Эльконина [7]) и в этом ее значение. Наша цель — продемонстрировать именно организующую роль текстовых задач.

Для этого, на примере умножения, мы с помощью текстовых задач проблематизируем у учащихся само это понятие умножения (ту "общую закономерность", на которую указывает В.В.Давыдов) до выражения его в знаке и, - следовательно, более глубокого понимания.

Почему именно "умножение"? Это связано, прежде всего, с практическими затруднениями учеников и учителей, работающих по существующим планам — конспектам и учебникам [1,4,6].

1. Умножение строится через сложение. В результате получается не общий способ умножения, а умножение чисел на натуральное число, что есть частный случай умножения. Кроме того, на наш взгляд, ни в программе развивающего обучения, ни в традиционной школе не заложены основания для решения методической задачи перехода от умножения рациональных чисел к умножению действительных чисел.

2. Затруднен переход от действий с величинами к числам при решении уравнений и текстовых задач (напомним, что на величинах умножения нет). Дети усваивают форму умножения на "разы". Природа "разов" остается скрытой и непонятной и детям, и, зачастую, учителю.

3. Остается непонятной "природа" умножения и связь умножения и сложения. Например, коммутативный и дистрибутивный законы:

$$AC=CA \quad C(A+B) = CA+CB$$

Если A, B — "разы", C — величина, то почему и AC и CA — величины, $A+B$ — сумма "разов", а $AC+BC$ — сумма величин?

Удачной иллюстрацией сказанного может служить пример, приведенный в книге М Клайн "Математика — поиск истины". "Человек заходит в обувной магазин и покупает три пары обуви по 20 долл. за пару. Продавец говорит, что три пары обуви по 20 долл. стоят 60 долл. и ожидает, что покупатель уплатит ему эту сумму. Покупатель же возражает, утверждая, что три пары по 20 долл. за пару — это 60 пар обуви, и настаивает, чтобы продавец приготовил 60 пар обуви. Прав ли покупатель? Прав, как прав и продавец. Если число пар обуви, умноженное на доллары, может давать доллары, то почему бы тому же произведению не давать пары обуви?

Все это говорит о том, что у детей не происходит осознания умножения как общего способа действия, той целостности (всеобщности), восхождение от которой позволяет ученику и учителю не путаться в частных текстовых задачах, а успешно решать их. Заметим, что вообще-то в математике все эти проблемы сняты через понятие кольца, алгебры, модуля.

Итак, что же есть содержание умножения как всеобщего способа действия? Ответ на этот вопрос есть, например, у А.Лебега: "Всякий вопрос, который приводит к умножению, является проблемой изменения системы единиц" [5] и у В.В.Давыдова: "Умножение как арифметическое действие является выражением или отражением реальной операции над множеством предметов, а именно операции перехода от одной единицы счета к другой. В результате этой операции и соответствующего ей действия, человек устанавливает результат счета первоначального множества с помощью меньшей единицы, которой он фактически это множество не считал" [3].

То есть умножение есть переход от измерения одной мерой к измерению другой мерой и соотнесение этих мер. Что в знаковой форме выглядит так:

$$A = Ne, \quad A = MeI, \quad eI = Ke \quad (1)$$

$$N \quad MK$$

где A — величина; e, el — мерки; N, M, K — числа

$$N = A/e, \quad M = A/el, \quad K = el/e$$

Иными словами, если A — величина, e, el — мерки, связанные формулами $A=Me$, $A=Mel$, $el=Ke$, то возникает вопрос, как связаны числа M, N, K ? Связь эта существует и называется умножением, что принято обозначать $M=MK$.

На наш взгляд, формулы (1) является той "предельной" знаковой формой, в которой раскрывается логическая суть операции умножения как перехода от измерения одной мерой к измерению другой мерой.

Анализ существующих учебных задач по умножению чисел показывает, что все они, правильно (детально) обозначая "вход" в понятие умножения через изменение меры, лишены завершающей логической целостности. Ведь в чем успех учебной задачи на понятие числа? Да в том, что логическая целостность числа есть и выражена в знаке:

$$N = A/e, \quad A = Ne, \quad (2)$$

Этот знак "оформляет" и логику действительного числа, и логику связи чисел и величин. Этот знак - и путеводная звезда и цель учебной задачи на понятие числа. Поэтому, методика учебных задач на умножение должна доходить (в пределе, идеально) до знаковых форм типа (1). Точнее эти знаковые формы должны во многом определять стратегию и суть учебных задач на умножение.

Серия таких учебных задач была разработана нами и предложена детям.

Из этого получилось следующее:

1 этап.

На доске запись:

$$10 \text{ ящиков} \times 100 \text{ коробок} =$$

Учитель предлагает детям проанализировать запись и решить, что получится?

Первоначально ответы детей сводились к следующим:

- 1000 ящиков;

- 1000 коробок;

- 1000;

- это невозможно сделать, т.к. две величины — количество коробок и количество ящиков;

- решить невозможно, это не пример, но и не задача.

Эти ответы не были приняты, тогда появились следующие:

Вова: — Эту запись можно спасти, чтоб что-нибудь найти. Мы должны знать, договориться, что во что вкладывается.

Илья: — Правильно ли я тебя понял, надо определить что больше?

Алеша: — Ящик может быть большой, а коробка маленькая (и нарисовал).

Паша: — Коробки тоже бывают большие, а ящики маленькие.

Учитель: — Дети, кто понял, о чем идет речь?

Миша: — У коробки есть пол, она занимает место в ящике, т.е. площадь.

Паша: — Это потому, что ящик имеет большую площадь и коробка занимает часть площади в ящике.

Учитель: — Я не понимаю, о чем говорит Паша.

Люба: — Насколько я поняла, Паша говорит, что ящик больше, чем коробка, потому что площадь пола у ящика больше. Но нам это не поможет, потому что в ящик складываются коробки.

Саша: — Нам надо знать количество, мы должны договориться, что куда помещается.

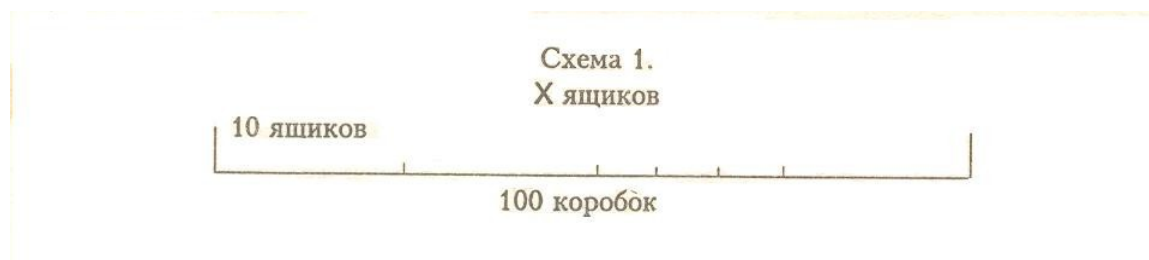
Алеша: — Например, в ящик складываются 100 коробок или наоборот.

Учитель: — Значит важно то, что мы примем за мерку: ящики или коробки. Если вы это сейчас выяснили, составьте его словесно и в виде схемы.

Работа в группах.

1 этап

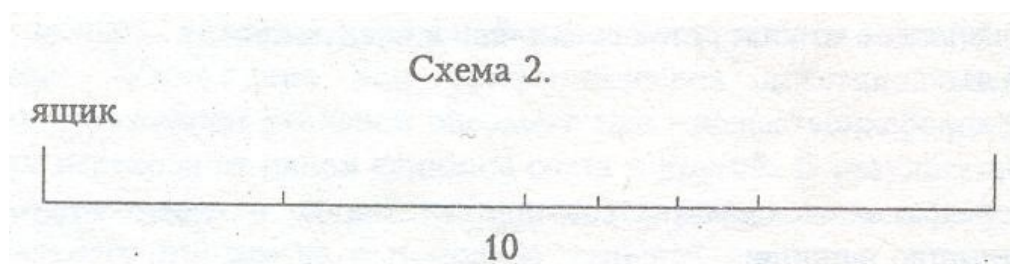
В одной коробке было 10 ящиков мороженого. А всего таких коробок было 100. Сколько ящиков мороженого было?



Учитель: — Почему ящики умножаются на коробки и получаются ящики? Саша: — 10 ящиков — это одна коробка, т.е. в одной коробке вмещается 10 ящиков.

Учитель: — А можем мы это как-нибудь изобразить на доске?

Никита: коробка



Учитель: — А почему же ящики получаются?

Паша: — Маленькая мерка — это ящик. Мы можем узнать, сколько ящиков всего в 100 коробках. Саша пишет:

e — ящик

10e — коробка

всего коробок — 100 (не написано чего)

Женя: — Раньше мы, когда измеряли величину, записывали это в виде формул. Саша, запиши это формулами.

Саша: $e^2 = 10e^1$ в одну коробку входит 10 ящиков. Таких коробок 10, значит:

$100e^2$ или $100 \cdot 10e^1$

$100 \cdot 10e^1 = 1000e^1$ или 1000 ящиков

$100 \cdot 10\text{ящ.} = 1000\text{ящ.}$

Аналогичные рассуждения были приведены для случая, когда результат равен 1000

коробок, т.е. e1 - 1 коробка.

Таким образом, появившиеся схемы дали возможность:

- выявить отношения "результат—выбранная мера";
- увидеть природу "разов";
- выразить величину через число.

Один ученик, Алеша Кушнарченко, который работал самостоятельно, так показал результат.

Алеша пишет:

$$100 \times 10 = 1000$$

Дети: — Неправильно! У нас же задача, а у тебя 1000 чего получилось?

Алеша: — Для нахождения числа мне достаточно перемножить 100 и 10, а чтобы понять чего — у меня есть запись: 1ящ. — 100кор.

То есть, дети шли к результату, постепенно представляя величину через число как знаковую форму. Алеша сразу начал работать с абстрактными числами, при этом понимая, что ему нужно вернуться к условию и воспользоваться общим мнением о мерке e1.

2 этап

Следующий этап работы проблематизирует соотношение мер. На доске надпись:

$$10 \text{ яблок} \times 100 \text{ груш} =$$

Учитель: Оформите свои идеи через текст и схему.

Дети взялись выполнять задание, но обнаружился тупик, который зафиксировал учитель и, тем самым, еще больше обострил ситуацию.

Учитель: Почему не получается? В чем проблема групп? Математическое действие тоже самое, числа те же, только наименования изменились. В чем трудность?

Дима: А каким образом можно яблоко в грушу вложить?

В ходе обсуждения возникло понимание, что необходимо соотнесение мер. В данном случае переход из одной системы мер в другую проблематичен.

3 этап

На доске надпись:

$$10 \times 100 =$$

Учитель: Представьте к записи текст.

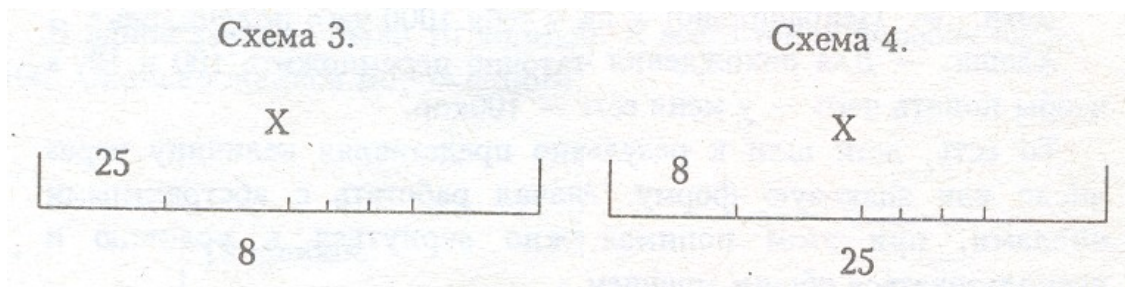
Большинство детей справились с поставленной задачей, хотя были дети, ответы которых требовали отдельного обсуждения:

Наташа: Я купила 10 жвачек, а подруга в 100 жвачек больше. Сколько она купила жвачек?

Света: Бутылки были уложены в 100 коробок и 10 ящиков. Сколько всего было тары?

4 этап

Далее детям была предложена контрольная задача: "В зале кинотеатра 8 рядов по 25 мест. Сколько мест в зале?" Для решения этой задачи дети разбились по группам. Учитель предлагает составить схему и написать формулу того, что получается. Дети предлагают следующие схемы:



Учитель: — Что такое 25 у вас на схемах?

1 группа: — Укрупненная мерка

— Количество маленьких мерок в большой.

Учитель: — А где просто мерка?

Дети: — Нам это не важно, мы знаем, что ряд — это 25 человек, тогда $X = 25 \times 8$

— А вторая группа схему построила неверно.

— Как это может быть: 8 рядов взяли 25 раз, что получится?

Учитель — Вы согласны?

Дети 2 группы: - Нет, у вас 200 и у нас 200 $8 \times 25 = 200$

Учитель: — На самом деле число получилось одинаковое. Вы согласны?

Дети: — Нет, мы получили количество рядов, а нам требуется найти количество мест.

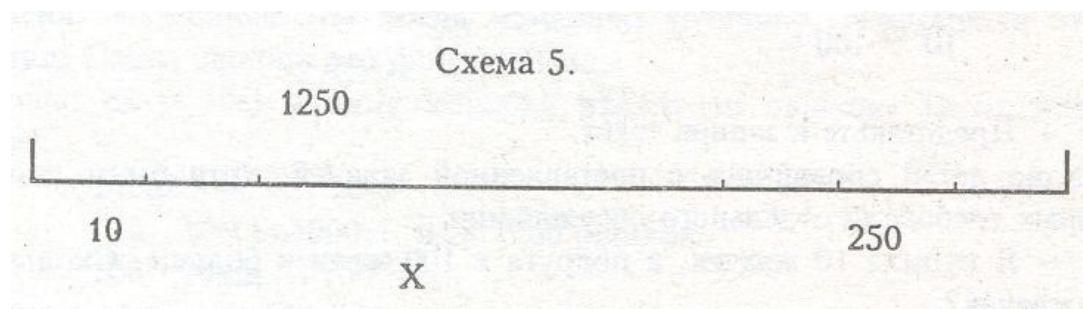
В данном случае решение задачи стало возможным благодаря возврату детей в реальную ситуацию и позволило обсуждать реальные отношения между величиной и числом.

5 этап

Диагностическая задача.

Колхозники собрали 1250 кг персиков, 250 штук оставили для себя, а остальные по 10 кг разложили в ящики. Сколько получилось ящиков?

Учащиеся принялись за решение задачи, и на доске появилась схема:



Большинство детей согласилось с предложенной учеником схемой.

Учитель: — Тогда по схеме восстановите условие.

В результате восстановления допускается ошибка: 250 штук дети заменяют на 250 кг. Часть детей это замечают:

— В условии говорится про штуки, а вы 250 определили как килограммы.

Часть детей сразу же отказывается решать задачу, обосновывая тем, что задача не имеет решения.

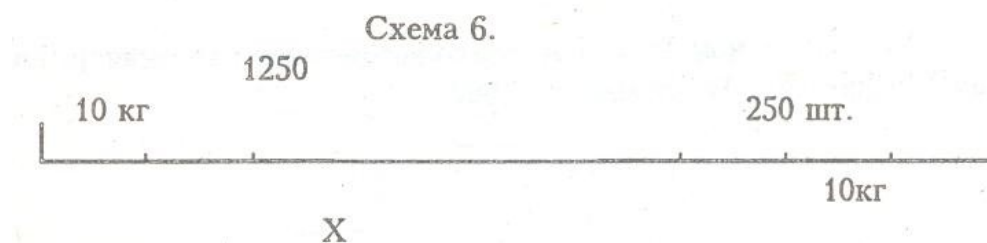
Паша: — А я ее решить могу. 1250 кг — персиков, 250 штук — тоже персиков, все персики имеют вес. Мы можем договориться, что 250 штук персиков — это примерно 10 кг (в одном кг будет 25 персиков).

Вова: — Это не точно, так нельзя, ты же не знаешь, сколько персиков в килограмме.

Люба: — А мне кажется, Паша прав. Мы можем договориться, что в 1 кг — 25 персиков и тогда будет 10 кг.

Саша: — Это нам поможет решить задачу, мы поймем, как такие задачи решать, а сколько это кг точно нам не важно.

Дети соглашаются, происходит исправление схемы.



Появляется решение:

$$(1250\text{кг} - 10\text{кг}) : 10\text{кг} = X$$

$$1240\text{кг} : 10\text{кг} = X$$

$$X = 24 \text{ ящика}$$

Учитель — 1240 кг делим на 10кг, а получаем ящики. Почему? Почему делили килограммы, а получили ящики? Этим вопросом учитель как бы ставит перед детьми задачу исследования того, как исчезают наименования единиц, откуда берутся другие.

Руководствуясь соотношением знаковых форм, мы можем ответить на этот вопрос следующим образом:

Пусть 1кг — e_1 , тогда 1 ящик — e_2

$$e_2 = 10 e_1 \text{ или } e_2 = K e_1$$

$$B = m e_1 \quad B = n e_2$$

$$m e_1 = B = n e_2 \quad m = n K$$

$$n = m/K \quad B = (m/K) e_2$$

То есть появляется именно количество ящиков — e_2 .

Что касается детей, то на поставленный учителем вопрос о том, почему делили килограммы, а получили ящики, дети отвечают следующее:

— Когда мы изменили условие, мы договорились, что 10 кг составляют 1 ящик.

— Мы делили, сколько всего будет килограммов на количество килограммов в одном ящике, значит получится сколько ящиков.

— Мы не на килограммы делили, а на килограммы в одном ящике.

— Можно просто числа разделить, а что получится — понятно из условия.

И хотя дети не дошли до знаковой схемы типа (1), их ответы соответствуют ей, что говорит о продуктивности их работы.

Литература:

1. Александрова Э.И. Математика 2 класс. Часть 2. МП "Пеленг", Томск, 1991.
2. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. М., "Педагогика", 1986.
3. Давыдов В.В. Психологические возможности младших школьников в усвоении математики. М., "Педагогика", 1969.
4. Захарова А.М., Фещенко Т.И. Математика 2 класс (программа РО). Харьков, СП "Инарт", 1992.
5. Лебег А. Об измерении величин. М., 1960.
6. Психолого-педагогические основы построения нового учебного предмета "Математика" для начальных классов /Под редакцией В.В.Давыдова, ч.б М., 1988.
7. Эльконин Б.Д. Об одном из путей психологического изучения рефлексии //Проблемы рефлексии. Новосибирск, 1987.