

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРЕДМЕТНЫХ ДЕЙСТВИЙ ПО ОСВОЕНИЮ ПОНЯТИЯ ВЕЛИЧИНЫ

Центральной проблемой в практике обучения остается вопрос о влиянии обучения на умственное развитие учащихся. Происходит ли переход на новый уровень развития мышления при освоении учащимися предметных понятий?

Для ответа на вопрос, возникающий не при теоретическом рассмотрении, а при реализации программ развивающего обучения, в качестве предмета анализа мы выбрали основные математические понятия "величина" и "число".

В школьном обучении формирования понятия величины начинается с выполнения практических действий по уравниванию объектов, что позволяет выявить разные их свойства, осуществить сравнение и преобразование величин. Модельная форма представленности действия сравнения и преобразования позволяет формировать адекватное понятие величины. В ситуациях, когда непосредственное сравнение выполнить невозможно, учащиеся обращаются к предмету - посреднику - мерке, с помощью которой находят кратное отношение между величинами. Число как модель кратного отношения величин помогает решить задачу разностного сравнения без практического соотнесения величин. Таким образом, учащиеся открывают способы сравнения и преобразования величин, выделяют с помощью меры их кратное отношение и осваивают способ получения числовой характеристики объектов, т.е. овладевают научными понятиями величины и числа и переходят от допонятийного к понятийному способу познания мира (1).

С целью определения сформированное™ понятий величины и числа автором совместно с О.И.Свиридовой в апреле-мае 1989 г. было произведено исследование с первоклассниками после прохождения темы "Введение понятия числа"(2). Основу правильного выполнения заданий методики составляли действия адекватные понятию числа: умение находить кратное отношение' между величиной объекта и заданной мерой, выполнять сравнение величин объектов с

опорой на число. Методический прием состоял в противопоставлении наглядных свойств предметов (форма, цвет) и их существенных характеристик (длина, площадь), что позволило определить: ориентируется ли ребенок при выполнении заданий на отношения величин или предметом его действия становятся несущественные для содержания понятия признаки.

По данным исследования можно констатировать тот факт, что у большинства первоклассников не формируется адекватное понятие о числе, т.к. в действиях детей не обнаруживается умения самостоятельно выбирать меру и находить числовую характеристику объектов. Из-за устойчивой ориентации на наглядные особенности предметов (форма, цвет) учащиеся неверно выполняют измерение и сравнение величин, а: в некоторых случаях не могут сделать эти действия и отказываются от решения. Учащиеся не могут произвольно работать с мерой, т. к. отождествляют величину и форму предметов. В этом случае измерение есть действие по определению того, сколько раз один объект укладывается в другой, а не поиск отношения меры к' величине измеряемого объекта. Геометрическая форма предметов диктует выбор мерки, и сравнение объектов происходит по разному основанию, т.к. каждый объект измеряется подобной с ним по форме меркой.

Итак, результаты проведенного исследования указывают на недостаточную сформированность понятия величины, что проявляется в отождествлении величины с формой объекта. Феномены натурализма приводят к деформации действий по измерению и сравнению величин и не позволяют формировать адекватное понятие о числе.

Для того, чтобы говорить о недостаточности существующего подхода в обучении математики, необходимо понять причины трудностей младших школьников в освоении понятия величины.

Рассмотрим три стадии формирования понятия величины, которые, по мнению Ж.Пиаже, соответствуют разным стадиям развития интеллекта ребенка (3). На первой стадии брутто-величины ребенок отождествляет величину со свойством, принимая во внимание лишь перцептивное различие между

объектами. На следующей стадии интенсивной величины происходит преодоление центрации на каком-либо одном свойстве; происходит их качественная корреляция, т.е. устанавливается логическое умножение отношений. Это приводит к открытию принципа сохранения количества, который представляет важный критерий развития мышления и означает появление конкретных операций, переход к операциональному мышлению. Однако понятие интенсивной величины основывается на качественных оценках и не является величиной в подлинном смысле. Только на третьей стадии происходит открытие экстенсивной величины как целостного числового образования, которое есть в своей сущности уравнивание качественно различных разностей по образцу арифметического разбиения.

Для Пиаже важное значение имеет понятие сохранения, которое рассматривается им как необходимое условие всякого математического мышления: "Число может быть постигнуто интеллектом лишь в той мере, в какой оно остается тождественным самому себе, независимо от размещения составляющих его единиц: именно это свойство называется "инвариантностью" числа. Такая непрерывная величина, как длина или объем может быть использована в деятельности разума лишь в той мере, в какой она образует постоянное целое, независимо от возможных комбинаций в размещении ее частей"(3;244). И далее: "Вряд ли можно с большей очевидностью доказать, что любое измерение неосуществимо, пока нет сохранения измеряемых величин, причем это происходит по той причине, что величины не поддаются композиции друг с другом"(3;522).

В практике обучения не создаются условия для формирования понятия о сохранении и, на наш взгляд, величина как предмет действия остается не выделенной для ребенка.

В своей работе мы будем, рассматривать задачу на преобразование объекта, в которой задается противоречие между изменением несущественных свойств объекта и сохранением его величины. Задача исследования состояла в том, чтобы обнаружить такое предметное действие, которое удерживает сохранение

величины при преобразовании объекта. Мы предположили, что таким действием является компенсация. Компенсация представляет такое отношение двух действий по изменению количественной характеристики объекта (увеличение, уменьшение), при уравнивании которых достигается сохранение исходной величины.

С целью определения условий и особенностей существования действия компенсации мы разработали методику "Компенсация". Предметное содержание методики составляет противоречие между величиной и формой предмета, которое задавалось в инструкции таким образом, что изменение формы предмета требовало Одновременного сохранения его величины. Для разрешения указанного противоречия необходимо было выделить предмет действия - величину - и построить компенсацию как действие по ее сохранению. Ситуацию возникновения компенсации мы смоделировали с помощью особого правила. Объект был условно разделен на две части. Фигуры, принадлежащие одной из сторон объекта, запрещалось переставлять на другую сторону. Невозможность построить новый объект с использованием исходного количества частей требовала обращения к дополнительному материалу (геометрическим фигурам, не входящим в состав данного объекта). Изменение исходной площади предмета и ее последующее восстановление должно свидетельствовать о построении компенсации как отношения двух действий по изменению и сохранению величины.

Для установления отношения между двумя действиями необходима специальная работа по их удержанию и координации. Нам известны два типа совместно распределенной работы, приводящей к возникновению новых познавательных действий:

- 1) условная система отношений, где предметные отношения моделируются с помощью условных персонажей (условно-динамическая позиция как механизм перехода к новым формам мышления [4,5,6]);

- 2) реальная система отношений, в которой различие центраций и характер задачи делают коллективную ситуацию конфликтной (социокогнитивный

конфликт как механизм перехода от дооперациональных к операциональным формам мышления[7]).

Мы сконструировали два варианта проведения методики "Компенсация", индивидуальный и коллективный, чтобы определить, при какой форме совместности - в условиях координации индивидуальных действий детей или при со-координации действий между условными лицами более эффективно строится действие компенсации.

В экспериментах участвовало 80 человек (учащиеся первого, второго и пятого классов), из них 50 человек (25 пар) выполняли задания в коллективном сеансе, 30 человек - в индивидуальном. Все учащиеся обучались по системе развивающего обучения в форме учебной деятельности и к началу эксперимента освоили по программе способы сравнения величин и могли устанавливать отношения между величинами с помощью числа.

Материалом для проведения методики послужили геометрические фигуры желтого и серого цвета, изготовленные из пластмассы. Площади квадратов, треугольников и параллелограммов составляли следующие отношения равенства: два маленьких треугольника равны меньшему из квадратов по площади, два больших треугольника составляли квадрат и др.

Методика состояла из четырех заданий, в первых двух требовалось исходную фигуру преобразовать в объект определенной геометрической формы - квадрат и прямоугольник, а в третьем и четвертом - построить изображение ракет и собаки. Перед выполнением каждого из заданий перед ребенком располагался лист бумаги с изображением фигуры, распределенной на две части (рис.1). В индивидуальном сеансе слева от ребенка слева от ребенка находилась игрушка - кукла-мальчик, слева - кукла-девочка. Ребенку предъявлялась следующая инструкция: "Девочка и мальчик решили построить фигуру и договорились при строительстве не заходить на сторону друг друга. Девочка работает с одной стороны, а мальчик с другой. Помогите им построить эту фигуру." После того, как ребенок выкладывал геометрическими фигурами из набора данный объект, экспериментатор продолжал задание: "Мальчик с девочкой сделали фигуру

(рис.1.а) и решили построить на этом месте квадрат, но так, чтобы площадь исходной фигуры не изменилась". При этом девочка не может переставлять "свои" фигуры на сторону мальчика, а мальчик на сторону девочки. Но мальчик и девочка могут пользоваться "общими" фигурами (показывает на дополнительные фигуры из набора)".

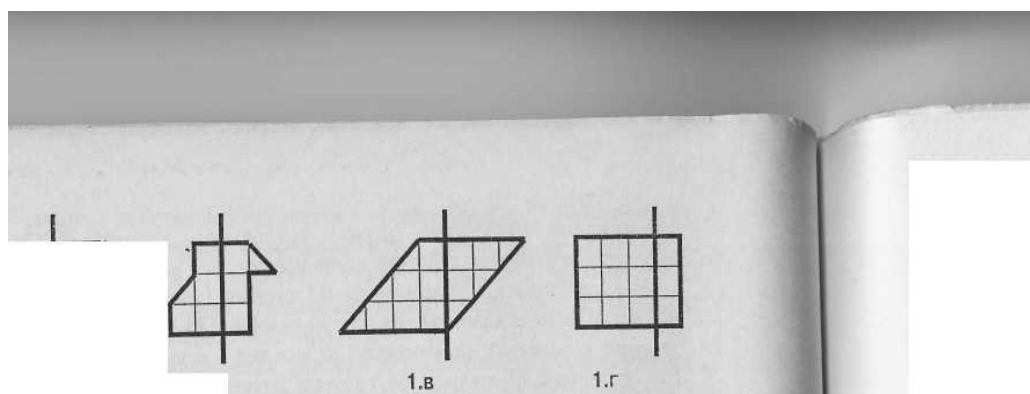


Рис.1 Материал заданий методики

Перед выполнением следующих заданий экспериментатор сообщает о том, что девочка с мальчиком из данной фигуры (рис. 1.б) хотят построить прямоугольник (задание 2), или сделать ракету (задание 3), чтобы площадь данного параллелограмма не изменилась (рис.1.в), или не изменяя площадь прямоугольника (рис.1.г) сконструировать собачку (задание 4). В случае переноса фигур с одной части объекта на другую экспериментатор указывал на нарушение правила взаимодействия между куклами (помощь 1 оказывалась 1 раз).

Если ребенок строил фигуру, большей или меньшей величины, чем исходная, то экспериментатор обводил контур полученной фигуры и указывал несоответствие размеров двух данных фигур (помощь 2), после чего ребенку предоставлялась возможность выполнить задание повторно, не изменив при этом площадь данной фигуры.

В коллективном сеансе содержание заданий не менялось, инструкция отличалась по форме предъявления. Экспериментатор сообщал испытуемым: "Перед вами расположена фигура, разделенная на две части чертой. Эта граница обозначает границу вашей работы, с одной стороны работает один человек и он

не может заходить на другую сторону. Постройте вместе эту фигуру, работая каждый на своей стороне." После того, как учащиеся выкладывали контур данной фигуры, экспериментатор сообщал задание и правило работы: "Вместе вы должны построить квадрат (прямоугольник, ракету, собачку) так, чтобы площадь исходной фигуры не изменилась. При этом вы не можете переставлять "свои" фигурки на сторону друг друга (указывает на черту). Вы можете использовать общие фигурки (показывает на дополнительный материал, расположенный в стороне от построенной фигуры)" Как и в индивидуальном сеансе, экспериментатор указывал на нарушение правил - перемещение и перенос частей за границу объекта (помощь 1), создавал возможность для наглядного сравнения площадей в случае несохранения количества (помощь 2), говорил о возможности использования дополнительного материала (помощь 3).

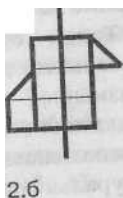
В результате анализа поведения испытуемых при решениях заданий в коллективном и индивидуальном сеансах мы выделили три уровня, отличных по выполнению двух условий методики:

- сохранение величины объекта при его преобразовании;
- выполнение правила взаимодействия с реальным или между условными партнерами.

К нулевому уровню относятся такие случаи неверного выполнения заданий, в которых наблюдается несохранение площади исходной фигуры. Их можно разделить на две группы:

1) первую группу составляют ответы, при которых испытуемые добавляют части из дополнительного материала таким образом, что построенная фигура включает себя площадь исходной и оказывается большей площади, чем данная (рис.2.а);

2) ко второй группе относятся такие построения новых объектов, когда из исходной фигуры убираются "лишние" части и новые объекты (квадрат, прямоугольник, изображения собаки и ракеты) оказываются меньшей площади (рис.2.б).



2.а

Рис.2 Типичные случаи несохранения данной величины в результате преобразования формы (Штриховкой отмечены построенные объекты).

Причинами данного выполнения заданий является то, что требование о сохранении площади исходной фигуры испытуемые понимают как сохранение ее целостности и указывают на то, что "если фигура изменится, то и площадь тоже". Основу такого поведения ребенка составляют действия, направленные на "сохранение объекта": либо как сохранение его частей, находящихся в определенной конфигурации и занимающих неизменное положение в соответствии с заданной формой, либо как сохранение контура данной фигуры. Указания экспериментатора на несохранение площади данной фигуры не меняет способа действия ребенка, в котором форма и площадь предмета отождествляются.

Ответы первого уровня показывают, что испытуемые различают форму и величину объекта и способны выполнить преобразования, сохраняя площадь данного объекта. Однако правило взаимодействия между условными персонажами или с реальным партнером при выполнении заданий не соблюдается, что проявляется в переносе частей через проведенную границу. Указания экспериментатора на нарушения правила часто приводят к отказу от поиска нового способа решения. На наш взгляд, причина такого поведения заключается в том, что все преобразования с объектом оказываются возможными только в пределах данного набора его частей, и часть воспринимается не как величина, а как принадлежащий данному объекту неизменный предмет. Такое понимание величины делает невозможной замену части объекта фигурой, равной ей по площади, и в силу необходимости изменения формы в пределах данного набора частей приводит к действию перестановки частей с одной стороны объекта на другую, т. е. к нарушению правила.

Таким образом, если нулевой уровень - это уровень глобального нерасчлененного отношения к объекту как к некоторой неизменной целостности, то первый уровень - это уровень выделения в объекте разных его свойств - величины и формы, но с отношением к части объекта не как к величине, а как к натурально взятой целостности, неизменно принадлежащей данному объекту -

Ко второму уровню относятся ответы испытуемых, полученные при выполнении заданий методики без нарушения правила и с сохранением площади фигуры при ее трансформациях. В большинстве случаев верные решения получались способом компенсации. При компенсации предметом работы ребенка становится количество, а не натуральная целостность предмета. При этом допускается изменение количества, когда одни части фигуры убираются, но добавляются равные им по площади другие части, взятые из дополнительного материала. Следует отличать два способа сохранения количества через его изменение: компенсацию и замену. При замене части заменяются равными по площади другими частями, не принадлежащими данному объекту, однако, возвращаются на ту сторону или место в объекте, с которого они были взяты. В случае компенсации нет такой зависимости между частью и ее местом расположения в фигуре. Можно сказать, что компенсация показывает отношение к объекту как к количественному целому, такой совокупности элементов, каждый из которых рассматривается независимо от формы и места расположения в объекте.

Выделенные нами особенности выполнения заданий методики можно рассматривать как качественные уровни в овладении понятием "величина", сравнимые со стадиями образования понятия величины у Ж.Пиаже. Так, для нулевого уровня характерно отношение к объекту как к перцептивно данной целостности, и происходит не сохранение величины, а сохранение этой целостности, не подлежащей разбиению на части и' не изменяющей свою конфигурацию.

На первом уровне наблюдается разложение данного объекта на части и их, перемещение внутри данной целостности. Однако величина представляет здесь

качественную целостность, т.к. при конструировании новой фигуры? воспроизводятся все части, входящие в состав исходного объекта. Сохранение величины происходит благодаря действиям перестановки, поворота' и представляет сохранение качественной совокупности со всем составом входящих в нее элементов.

Только на втором уровне построение новой величины происходит с ответвлением как от пространственного положения части, так и от их качественных особенностей. На основе действий замены и компенсации достигается количественное уравнивание результатов, двух действий - добавленных и убранных элементов, что приводит к построению величины как количественного целого.

Сделав качественный анализ выполнения заданий методики, сравним решения, полученные способом компенсации в двух равных выборках (Таблица 1).

Таблица 1. Сравнение результатов решений способом компенсации в двух экспериментальных ситуациях

	индивидуальная			коллективная			вся выборка	
Класс	1	2	5	1	2	5	инд.	колл.
кол-во уч-ся	10	9	10	9	8	8	29	25
кол-во уч-ся использующих компенсацию хотя бы в одном задании (%)	50	55.5	70	44.4	75	87.5	58.6	68
кол-во всех ответов	40	36	40	36	32	32	116	100
кол-во ответов с компенсацией (%)	20	25	37.5	22.2	34.4	37.5	27.6	31

Как видно из таблицы, при групповом взаимодействии из всего количества полученных ответов 31% решений достигнут способом компенсация, а при

индивидуальном - 27,6%. Выбирая в качестве показателя сравнения процент детей, использующих компенсацию хотя бы в одном из четырех заданий, мы получили данные о том, что в коллективной ситуации величина данного показателя выше на 9,4%, чем в индивидуальной ситуации. Однако указанные различия (в Таблице 1 они подчеркнуты) при проверке по критерию χ^2 оказались несущественными ($\alpha=0,05$), что не дает достаточных оснований для принятия предложения о том, что коллективная форма взаимодействия более эффективна для построения компенсации, чем взаимодействие с условными персонажами в индивидуальной ситуации.

По результатам выполнения всех заданий методики (Таблица 2) оказалось, что количество верных ответов (2 уровень), полученных в условиях работы с реальным партнером, значимо отличается от ответов, полученных в индивидуальной ситуации (критерий χ^2 , $\alpha=0,05$).

Таблица 2. Сравнение ответов разного уровня в двух экспериментальных ситуациях

	И Н Д.			К О Л.			И.	К.
класс	1	2	5	1	2	5	вся	Выбор.
Кол-во ответов	40	36	40	36	32	32	116	100
% верных ответов (2 уровень)	32.5	27.8	60	25	56.3	62.5	40.5	56
% промеж. ответов (1 уровень)	32.5	30.6	10	25	6.2	9.4	24.1.	14
% неверных ответов (0 уровень)	35	41.6	30	25	37.5	28.1	35.4	28.1

Оказалось, что в реальных отношениях с партнером учащиеся более чувствительны к выполнению правила: следят за тем, чтобы другой партнер не брал у них фигуры, не переходил за линию.

В этом случае правило регулирует отношения с партнером, однако, не всегда возникает координация действий по сохранению общей величины. Этот факт подтверждает данные о снижении доли компенсации среди всех верных

решений в коллективной ситуации на 12,1% по сравнению с индивидуальной ситуацией. При этом возрастает более простая форма решений - перестановка, где каждый из участников переставляет части фигуры на своей стороне без учета действий партнера. Такая совместная форма выполнения представляет сумму двух частных действий по перестановке частей и качественно (в смысле овладения понятием сохранения) не отличается от действия перестановки в индивидуальных условиях. Если при индивидуальной форме проведения действие перестановки приводило к нарушению правила и оценивалось нами как первый уровень выполнения задания, то действие перестановки в совместной форме благодаря контролю со стороны партнера не приводило к нарушению правила и оценивалось нами как второй уровень выполнения заданий.

Таким образом, проведенное исследование выявляет, что способом действия, удерживающим сохранение величины, является компенсация. Компенсация есть отношение скоординированных действий по изменению количества, где увеличение объекта на одну величину компенсируется уменьшением его на такую же величину. Компенсация представляет такой подход к величине, при котором она отделима от перцептивно данной целостности объекта и представляет количественную совокупность, не зависимую от качественных особенностей составляющих ее элементов.

Относительно условий построения компенсации выявлено, что данный способ действия с величиной существенно не зависит от формы взаимодействия (действия с реальным партнером или с условными персонажами), а возникает в ситуации необходимости распределения и координации действий. Следует учитывать, что указанная необходимость возникает чаще в индивидуальной ситуации. Распределить действия между условными персонажами легче, чем построить совместно распределенную форму компенсации с реальным партнером. Правило взаимодействия в коллективном сеансе скорее связано с отношениями между партнерами, чем с необходимостью построения компенсации. Однако коллективная форма взаимодействия более эффективна в достижении успешных результатов решения задач, в условиях которых с

необходимостью задано выполнение правила.

Методику, разработанную и примененную в целях исследования, можно использовать для диагностики сформированности понятия "величина", т.к. выделенные уровни решения заданий и соответствующие им способы действия можно рассматривать как критерии овладения понятием величины. Данные, полученные нами при обследовании школьников, показывают, что к концу пятого класса 30% учащихся не владеют понятием величины. Это указывает на необходимость усовершенствования существующего подхода в обучении математике и введения в методику обучения задач, формирующих понятие об инвариантной величине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Давыдов В.В. Проблемы развивающего обучения. М.,1986.
2. Важенина О.С.Свиридова О.И. Формирование понятий и психических способностей у младших школьников в контексте учебной деятельности. Дипломная работа. КГУ. Психолого-педагогический факультет. 1990.
3. Пиаже Ж. Избранные психологические труды. М.,1994.
4. Недоспасова В.А. Психологический механизм преодоления центрации в мышлении детей дошкольного возраста. Автореф. канд. дис.М.,1972.
5. Белоус В.П. Психологические особенности формирования предметных и вербальных интеллектуальных операций у дошкольников: Автореф. канд. дис. М., 1978.
- 6 Филиппова Е.В. Психологические предпосылки формирования логических операций у детей дошкольного возраста: Автореф. канд. дис. М., 1977.
7. А.-Н. Перре-Клермон Роль социальных взаимодействий в развитии интеллекта детей. М.,1991.