

**К вопросу о диагностике математического понятия "величина"
(практика развивающего обучения)**

Проблема оценки качества знаний интенсивно разрабатывается в последнее время специалистами разных подходов к обучению. Основопологающим принципом диагностики в педагогической психологии является соответствие критериев, способов оценки программе и методу формирования знаний.

В подходе развивающего обучения, организованного в соответствии с теорией учебной деятельности, при разработке диагностических методов по оценке сформированности математических понятий важно учитывать специфику учебного содержания. Содержанием учебной деятельности является освоение учебного предмета как системы теоретических понятий о некоторой области действительности. Специфику теоретического понятия принято рассматривать в двух планах: в плане содержания понятия и его формы. Согласно В.В.Давыдову, основу понятия составляет некоторая абстракция, представляющая собой генетически исходное отношение, которое при последующей конкретизации может быть развернуто в систему, раскрывающую сущность (строение и условия происхождения) некоторого феномена. Форма теоретического понятия имеет модельный характер. "Специфика всех познавательных моделей, — пишет В.В.Давыдов, — состоит в том, что в них могут выражаться и фиксироваться такие качества оригинала, которые либо не выступают в последнем непосредственно, либо не могут быть в нем прямым объектом действия субъекта"[1;83]. Итак, с одной стороны, сущность моделирования заключается в замещении объектов действительности, а с другой стороны, модель позволяет получить новые знания об их строении, т.е. является орудием познания действительности.

В соответствии с содержанием учебной задачи и заданной в ней последовательностью учебных действий О.В.Савельева выделила в качестве нормативных характеристик теоретического знания три основные характеристики:

предметность, системность и обобщенность. "При постановке учебной задачи, — пишет О.-В.Савельева, — создаются условия для того, чтобы ученики различили логику научного предмета изучения и собственную, не совпадающую с ней, логику. В ситуации противопоставления этих двух логик формируются исходные уровни предметности знаний. После чего оказывается возможным само выделение и модельная фиксация исходных свойств предмета изучения, общего способа действия с ним. Выделенность, представленность исходного отношения и его свойств составляет характеристику знания со стороны предметности... Показатель обобщенности знания характеризуется возможностью применять сформированный способ действия к решению частных конкретно-практических задач... Возможность развития выделенного принципа, его преобразования применительно к новому подклассу задач, составляет содержание показателя системности знаний" [2;9].

Под руководством В.В.Давыдова группой методистов было разработано содержание дочислового периода и выделены основные способы действия по формированию математического понятия величины [3].

Критерием понимания величины как особого свойства предметов является то, что при оценке отношений между реальными объектами учащиеся отказываются от непосредственных суждений, выделяют общий для сравниваемых предметов признак и с помощью него устанавливают соответствующие отношения между величинами ($<$, $>$, $=$).

В подходе Б.Д.Эльконина к логико-психологическому строению понятия величины как свойства предметов недостаточно для полноценного формирования понятия величины. Понятие величины необходимо рассматривать через отношение двух основных действий: сравнение и преобразование, которые задаются при аксиоматическом определении математической величины. Таким образом, в подходе Б.Д.Эльконина, критерием сформированности понятия "величина" становится умение ребенка с помощью предмета-посредника (разницы) рассматривать отношение между величинами через их изменение, т.е. уметь переходить от сравнения к преобразованию и обратно.

Анализ методических разработок по математике (экспериментальная программа В.В.Давыдова), проведенный с точки зрения на величину как отношение действий, показал, что в обучении детям недостаточно представлена знаковая характеристика понятия величины. Ориентируясь на отношения $<$, $>$, $=$, учащиеся осуществляют разностное сравнение предметно представленных величин, однако само разностное отношение не является особым предметом действия. Другими словами, учащиеся не выстраивают переход от сравнения к преобразованию с опорой на разницу.

Мы полагаем, что недостаточная разработка подхода к введению величины как совокупности параметров объекта ограничивает возможности учащихся в освоении полного понятия величины.

Задача настоящего исследования состояла в том, чтобы определить, каким образом содержание понятия "величина" представлено в действиях детей.

При конструировании диагностических методик мы опирались как на нормативные характеристики понятия, выделенные в результате логико-психологического анализа, так и на требования к построению системы диагностических заданий.

В соответствии с критерием предметности теоретического знания необходимо было выделить как существенные признаки понятия, так и несущественные для объективного содержания понятия признаки. Создание в экспериментальной ситуации ориентации ребенка на несущественные признаки, присутствующие в реальной ситуации решения задачи, позволит определить, что является содержанием действий ребенка и совпадает ли оно с содержанием понятия.

Следовательно, общий принцип построения экспериментальной ситуации должен состоять и противопоставлении двух возможных способов действия ребенка: натурального отношения к объекту и теоретического отношения к нему.

Если окажется, что уровень знаний, определенный по диагностическим методикам, не соответствует нормативным критериям сформированности математического понятия "величина", то можно будет сделать вывод о том, что

существующая система заданий в экспериментальной программе по математике не совершенна и не приводит к полному формированию понятия.

С целью определения сформированности понятия "величина" в соответствии с нормативными характеристиками, приведенными и предыдущем параграфе, нами была разработана методика "Полоски".

Задания, представленные в методике, позволяют выявить, выступает ли для детей отношение между величинами (разница) как предмет преобразования — перехода от одной величины к другой. Следовало определить, могут ли дети представить отношение $A > B$ через отношение $A = B + C$, т.е. дискретное отношение между двумя объектами рассмотреть через непрерывное преобразование одной величины (A) из другой (B).

Кроме того, сконструированная нами методика необходима для того, чтобы выявить, умеют ли учащиеся моделировать процесс преобразования величин. Процесс преобразования величины в заданиях методики был представлен двумя планами: предметным (ряд бумажных полосок) и символическим (формулы, описывающие процесс преобразования). То, насколько ребенок различает эти два плана и может переходить от одного к другому, позволяет судить о сформированности действия моделирования.

Основной принцип построения методики состоял в выделении и представлении отношения между двумя действиями: с одной стороны, преобразованию объекта противопоставлялось сравнение двух объектов как отдельных вещей, с другой стороны, объекты предъявлялись, "как будто" разные состояния изменения одного объекта.

Процесс преобразования был задан возрастающим рядом бумажных полосок. С помощью формулы, описывающей преобразование, требовалось из данного ряда бумажных полосок путем попарного сравнения их между собой выделить отношение между ними (разницу). Трудность данного задания состояла в том, что разницы были отмечены в формуле буквами, однако не были представлены наглядно. Требовалось восстановить разницу как способ перехода от одной величины к другой. Мы полагаем, что именно в таких заданиях разница,

представленная как отношение между двумя величинами, найденная путем сравнения их между собой, позволяет восстановить действие преобразования через сравнение, т.е. выступает как знак, фиксирующий отношение двух действий.

Эксперимент проводился в сентябре-октябре 1989 года. Испытуемыми были 30 учеников 3 класса экспериментальной школы № 91 г. Москвы.

Материалом для методики послужили четыре бумажные полоски разной длины, расположенные в порядке возрастания по длине (рис.1).

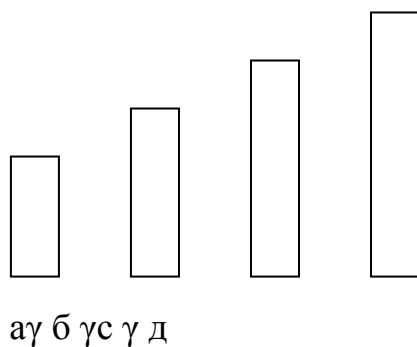


Рис.1. Расположение материала задания

Экспериментатор предъявлял инструкцию, в которой содержалось объяснение процесса преобразования: "У меня есть резиночка, которая все время растягивается. Сначала она была такая (показывает на меньшую полоску в начале ряда), затем такая (показывает на следующую), потом вот такая (третья полоска в ряду) и, наконец, стала такая (показывает на самую большую полоску)". Далее экспериментатор записывал под рядом полосок формулу $a + b + c + d$ и задавал следующие вопросы: — Покажи на полосках, где а, в, с, д. — С помощью какого математического действия можно написать про растяжение резиночки?

Если испытуемый не мог ответить на вопрос о действии, то экспериментатор записывал следующую формулу под предыдущей (рис.1) и давал объяснение: "Растяжение резиночки из "а" в "д" я описала через сложение". После этого экспериментатор предъявлял ряд заданий.

Задание 1. В данном задании требовалось найти отношения (разницы) между бумажными полосками, обозначенные в формуле буквами. "Покажи на полосках, где м, к, о, е?"

Задание 2. Требовалось по записанным формулам $k+o$, $o+e$, $k+e$ найти в предметном плане сумму разниц: "Что значит сумма $k+o$? Покажи на полосках".

Задание 3. В данном задании требовалось найти соответствие между формулой, замещающей ряд полосок, и формулой, моделирующей процесс изменения длины резиночки. "Давай с тобой поиграем, — говорил экспериментатор, — Мы должны получить одинаковый результат, работая с разными формулами. Я буду работать с формулой $a + u + v + u + c + u + d$, а ты с формулой $m + k + o + e$. Я из "в" получаю "с" (показывает на часть формулы $v + c$), а ты? Покажи часть своей формулы, по которой получится тот же результат, что и у меня". Испытуемый должен показать часть формулы, соответствующей результату изменения по формуле экспериментатора.

Результаты.

В эксперименте участвовало 30 детей. Из них со всеми заданиями справились 4 человека (13%). С первым заданием 50% детей справились самостоятельно, а 50% лишь после наводящих вопросов экспериментатора перешли от неверного решения к верному.

Верным способом решения задания 1 мы считали такое поведение испытуемых, когда они по формуле сложения могли выделить разницу из предметного ряда полосок. Отличительным признаком такого поведения являлся жест испытуемого; пальцами показывается расстояние, на которое отличаются соседние в ряду величины (рис.2).

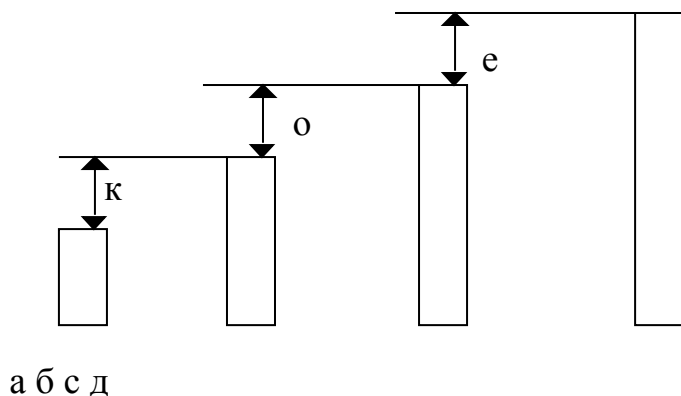


Рис.2. Выделение разниц: а, в, с, д — полоски; к, о, е — разницы. Мы наблюдали типичное поведение при неправильном решении задания. Испытуемые

указывали, как правило, на полоски и не пытались находить отношение между величинами. В этом случае формула $m + k + o + e$ ничем не отличалась от формулы $a \gamma b \gamma c \gamma d$.

Экспериментатор просил ребенка по формуле сложения выполнить действие с полосками. Испытуемый прикладывал полоски по длине в одну линию (рис.3).

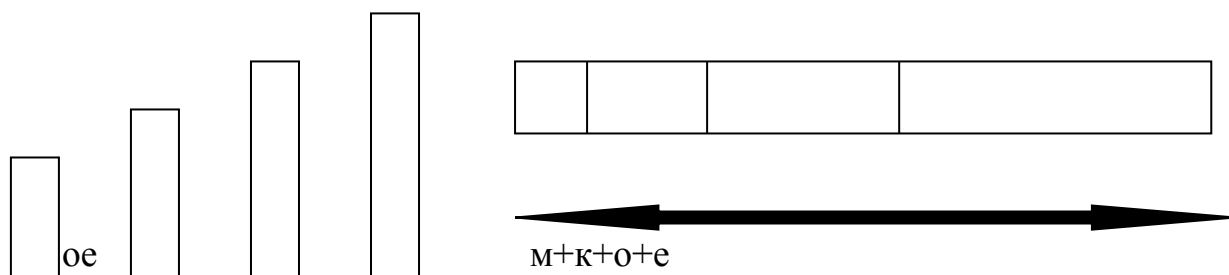


Рис.3. Отождествление разниц с полосками.

После того, как экспериментатор спрашивал, до какой длины растягивалась полоска, учащиеся убеждались, что они неверно нашли величины и нарушили условие задачи.

Важно отметить, что такая подмена условий задания свидетельствует о том, что испытуемые непосредственно соотносят предметы и буквенное обозначение величин, не обращая внимания на математический знак сложения. Если разница наглядно не представлена, то испытуемые не могут ее выделить. В этом случае разница не является способом перехода от одной величины к другой, а выступает предметом — таким же, как и сравниваемые предметы.

При выполнении задания 1 экспериментатор добивался понимания и предметной фиксации разницы с помощью жеста (двумя пальцами испытуемый показывал тот отрезок, на который увеличивалась одна из полосок). После этого учащиеся переходили к выполнению задания 2. От общего числа испытуемых только 40% детей смогли правильно выполнить задание 2.

При верном решении мы наблюдали следующие способы поиска суммы разниц:

-либо учащиеся сначала показывали пальцами отрезок (разницу), а затем

объединяющим жестом присоединяли отрезки друг к другу (рис.4,а);

-либо полосы накладывались детьми одна на другую, а общая разница выделялась как часть одной из полосок (рис.4,б).

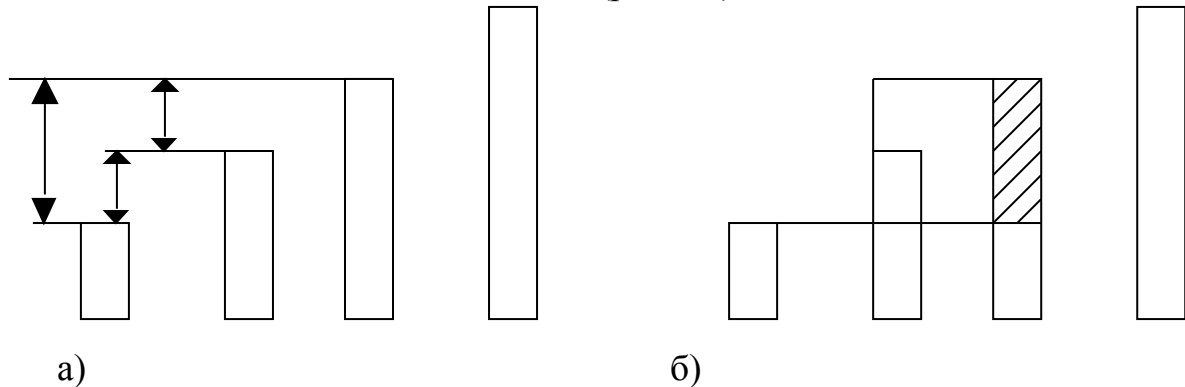


Рис.4. Варианты верного решения задания 2.

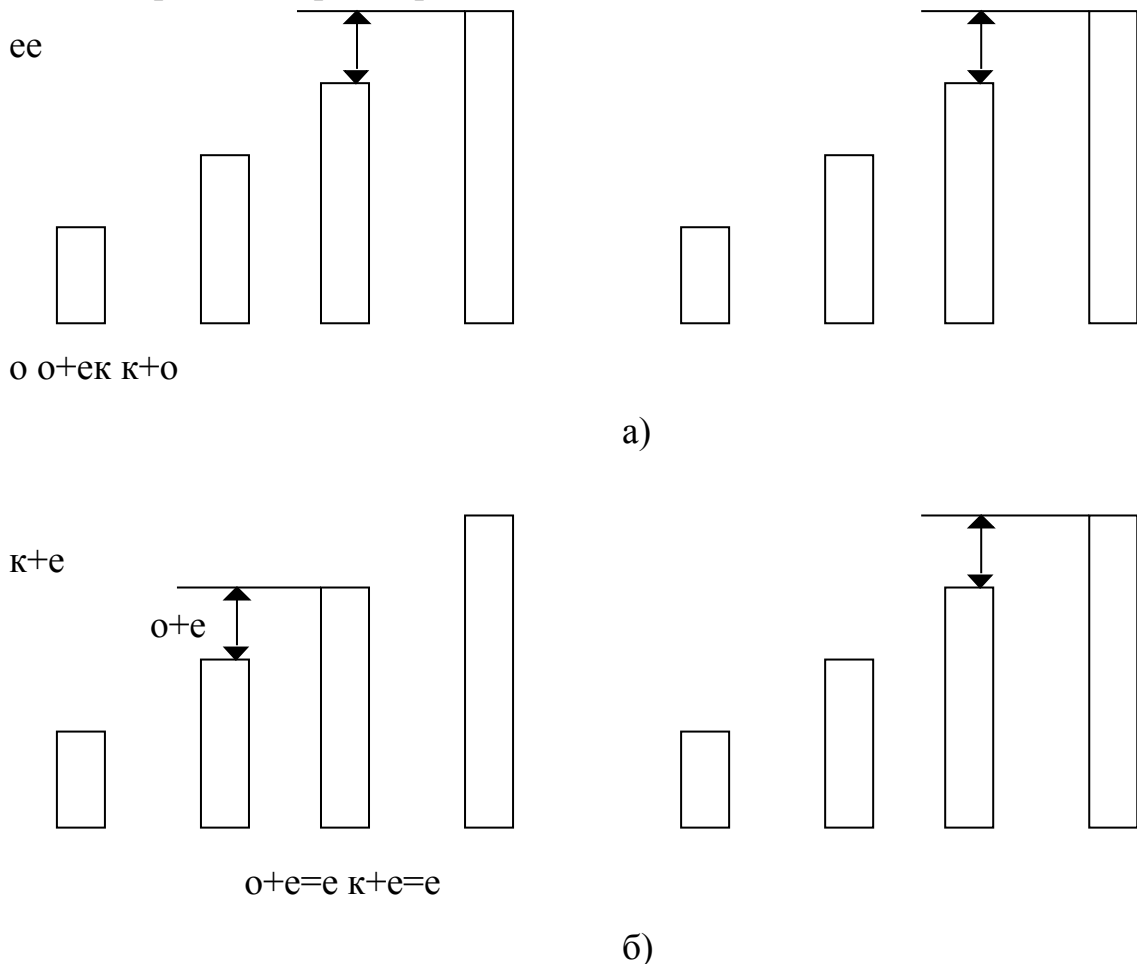


Рис.5. Варианты неверного решения задания 2.

При неверном выполнении задания наблюдалось два типа ответов. В первом случае за сумму разниц принималась одна из полосок (рис.5,а).

Во втором случае, когда экспериментатор просил показать сумму разниц, испытуемые показывали только одну из разниц (например, вместо $o + e$ выделялся

отрезок о или е) (рис.5,б.).

Видно, что в таких случаях испытуемые не могут работать с разницей. Даже если происходит верное выделение одной из разниц (случай 2), то испытуемый все равно не может найти сумму, т.е. предметно показать общее отношение. Эти данные свидетельствуют о том, что для детей не произошло отделение отношений от самих вещей, не существует вне предметов и должно быть представлено наглядно.

Выполнение задания 3 оказалось самым трудным для учащихся, т.к. требовалось работать уже не в плане предметного ряда полосок, а находить отношение между двумя видами записи одного и того же процесса преобразования величины резиночки.

Только 30% от общего числа испытуемых (9 детей) смогли верно выполнить это задание. Эти испытуемые действовали без опоры на предметный ряд и не принимали во внимание провоцирующий фактор, что одна формула записана точно под другой.

Напротив, для другой группы испытуемых из 21 участника эксперимента (70%) такая запись провоцировала на буквальное повторение действий экспериментатора, работающего с первой формулой. Испытуемые совмещали части двух формул и отвечали, например, что переход от "в" к "с" (в → с) означает, по их формуле, $k + o$ (рис.6).

$a \rightarrow v$	$v \rightarrow c$	$c \rightarrow d$
$m + k$	$k + o$	$o + e$

Рис.6. Неверное соотнесение формул $m + k + o + e$ с формулой $a \rightarrow v \rightarrow c \rightarrow d$

Оказалось, что значки " — " и " + " означают одно и то же действие: переход от одной вещи к другой.

Таким образом, обнаруженный факт натурального понимания разницы, отношение к ней как к вещи в ряду других вещей означает, что процесс изменения вещей и процесс действий с отношениями между вещами оказываются слиты в мышлении детей.

Итак, результаты проведенного эксперимента показывают, что к третьему

классу обучения по экспериментальной программе по математике только 27% учащихся (выполнивших задание 1 и 2) могут не только выделить отношение, которое не представлено предметно, но и моделировать процесс преобразования этих отношений.

Однако 50% учащихся (по результатам решения заданий 1) не могут самостоятельно выделить отношение между двумя предметами, т.е. не могут отделить отношение между вещами от самих вещей. Это позволяет сделать вывод о преобладающем натуральном подходе в отношении к математическому понятию "величина".

Данные эксперимента указывают на недостаточную разработку как логико-психологического анализа понятия "величина", так и методического оформления заданий по формированию полноценного понятия величины.

Уместно привести положение Б.Д.Эльконина о том, что знаковость как центральная характеристика понятия величины не формируется спонтанно, а должна стать объектом специального формирования.

Подтверждается наше предположение о том, что введение понятия величины, основанное на действиях уравнивания и сравнения, недостаточно. Необходимо принять во внимание положение о том, что введение величины должно быть основано на отношении двух действий: сравнения и преобразования. Это положение требует поиска особой формы представленности для ребенка действия по преобразованию величины объекта, на основе которого возможно было бы осуществлять переход к действию сравнения.

Данная работа выполнена при поддержке Красноярского фонда науки (грант 5Р 0141).

Литература

1. В.В.Давыдов, А.У. Варданян. Учебная деятельность и моделирование. — Ереван, 1981.
2. О.В.Савельева. Психологические критерии качества знаний младших школьников. Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата психологических наук. М., 1989.

3. Психолого-педагогические основы построения нового учебного предмета "Математика" для начальных классов / под ред. В.В.Давыдова.—М., 1989.

4. Б.Д.Эльконин. Психологическое строение понятия величины// "Вопросы психологии", 1986, №1.